ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики.

2018-2019 н.р.

11 клас

11.1. Обчислити значення виразу

$\dfrac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, де $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{2018}{1580}}-\sqrt{\dfrac{1580}{2018}}\right)$

***Відповідь.* 1799.**

Вказівки до розв'язання.

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2018}{1580}}-\sqrt{\frac{1580}{2018}}\right)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)>0.$$

$$x^2+1=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)+1=\cdots=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{1580\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\frac{1580\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{2}{t}}=1580\cdot\frac{t^2+1}{t}\cdot\frac{t}{2}=\frac{1580}{2}\left(t^2+1\right)=$$

$$\frac{1580}{2}\left(\frac{2018}{1580}+1\right)=\cdots=1799.$$

11.2 Порівняти числа $\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^4$ та $\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^7$

Вказівки до розв'язання.

$$\frac{2018}{2019}=1-\frac{1}{2019},\frac{2017}{2018}=1-\frac{1}{2018}.$$

$$\frac{1}{2019}<\frac{1}{2018};\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2019}>1-\frac{1}{2018}\Leftrightarrow\frac{2018}{2019}>\frac{2017}{2018}\Leftrightarrow\left(\frac{2018}{2019}\right)^4>\left(\frac{2017}{2018}\right)^4>\left(\frac{2017}{2018}\right)^7.$$

11.3. В арифметичній прогресії $a_2=6$. При якому значенні різниці прогресії (d<0) добуток $a_1a_3a_6$ буде найменшим ?

***Відповідь.* -4.**

Вказівки до розв'язання.

$$a_2=6, a_1=6-d, a_3=6+d, a_6=6+4d.$$

$$a_1a_2a_3=(6-d)(6+d)(6+4d)=\left(36-d^2\right)(6+4d)$$

$$f'(d)=\left(\left(36-d^2\right)(6+4d)\right)'=-2d(6+4d)+4\left(36-4d^2\right)=$$
$$=-12d-8d^2+144-4d^2=-12d^2-12d+144$$

$$f'(d)=0;\quad \mathrm{d}_1=-4,\ d_2=3$$

$d_{\min} = -4$

Відповідь: $d_{\min} = -4$

11.4. Розв’язати рівняння:

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x^2}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)=0$$

Відповідь. **рівняння розв'язків не має.**

Вказівки до розв’язання.

Областю визначення виразу є множина, що відповідає умовам:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ 8x-2x^2-6\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases}$$

Розв'язком системи є два числа: 1, 3, підстановка у рівняння не дає правильної рівності.

Відповідь: рівняння розв'язків не має.

11.5. Дано прямокутний трикутник. Трикутник, складений з його медіан, подібний заданому трикутнику. Знайти найменший кут трикутника.

Відповідь. $\sin\angle A=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вказівки до розв’язання

Нехай c — гіпотенуза, a,b — катети трикутника $(a\le b)$. Тоді його медіани рівні $m_a=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}, m_b=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}, m_c=\frac{c}{2}$, до того ж $m_a\ge m_b>m_c$. З подібності трикутників маємо пропорційність сторін $\frac{\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}}{c}=\frac{\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}}{b}=\frac{c}{2a}$. Звідси одержимо $c=a\sqrt{3}, b=a\sqrt{2}$, а тому найменший кут трикутника визначається рівністю $\sin\angle A=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10 клас

10.1. Порівняти числа $\left(\frac{2017}{2018}\right)^4$ та $\left(\frac{2016}{2017}\right)^5$

Вказівки до розв’язання

$$\frac{2017}{2018}=1-\frac{1}{2018}, \frac{2016}{2017}=1-\frac{1}{2017}.$$

$$\frac{1}{2018}<\frac{1}{2017};\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2018}>1-\frac{1}{2017}\Leftrightarrow\frac{2017}{2018}>\frac{2016}{2017}\Leftrightarrow\left(\frac{2017}{2018}\right)^4>\left(\frac{2016}{2017}\right)^4>\left(\frac{2016}{2017}\right)^5.$$

10.2. Знайдіть всі пари чисел , що задовольняють рівнянню:

$$\frac{(x^2+4x-5)^{2016}+(2x^2+xy-y^2)^2}{(y^3+y^2+4y+4)\sqrt{21+4y-y^2}}=0$$

Відповідь. (-5;5), (1;2).

Вказівки до розв'язання

Враховуючи умову рівності дробу нулю та область визначення виразу маємо систему умов:

$$\begin{cases} x^2+4x-5=0, \\ 2x^2+xy-y^2=0, \\ y^3+y^2+4y+4\neq 0, \\ 21+4y-y^2>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+5)(x-1)=0, \\ (x+y)(2x-y)=0, \\ (y+1)(y^2+4)\neq 0, \\ (y+3)(y-7)<0; \end{cases}$$

З перших двох рівнянь маємо пари розв'язків: (-5;5), (-5;-10), (1;-1), (1;2).

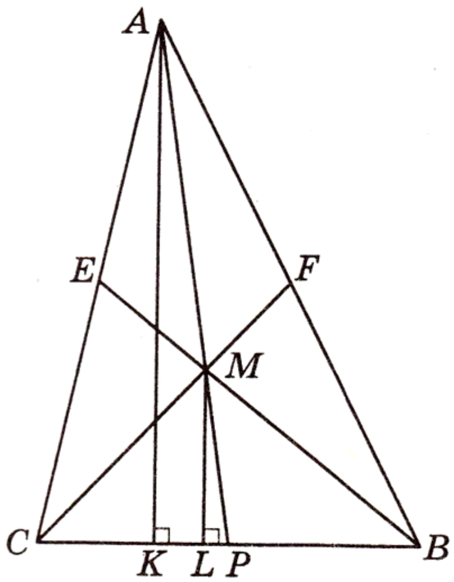
Для пар (-5;-10) та (1;-1) не виконуються умови $(y+3)(y-7)<0$ та $(y+1)(y^2+4)\neq 0$ відповідно. Отже, маємо розв'язки: (-5;5), (1;2).

Відповідь: (-5;5), (1;2).

10.3. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, – 9 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

Відповідь. 72 см²

Вказівки до розв'язання



BE і CF — медіани $\triangle ABC$, $BC=10$ см; $BE=9$ см; $CF=12$ см. Знайдемо площу $\triangle CMB$, де M — точка перетину медіан. Маємо:

$$BM=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\cdot 9=6 \text{ (см)};$$

$$CM=\frac{2}{3}CF=\frac{2}{3}\cdot 12=8 \text{ (см)}.$$

$\triangle CMB$ — прямокутний, оскільки $6^2+8^2=10^2$; $\angle CMB=90°$.

$$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Нехай AP — третя медіана ΔABC, AK — висота трикутника ABC, ML — висота трикутника CMB. Оскільки $MP:AP=1:3$, то $ML:AK=1:3$, а тому $\frac{S_{\triangle CMB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$. Тому $S_{\triangle ABC}=3\cdot 24=72$ (см^2).

10.4. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Вказівка до розв'язання

Оскільки a^2 і b – числа додатні, то за нерівністю Коші для середнього арифметичного і середнього геометричного отримаємо: $\frac{a^2+b}{2}\geq\sqrt{a^2b}$, $a^2+b\geq 2\sqrt{a^2b}$. Аналогічно, застосувавши нерівність Коші до чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b^2}$, які є додатні, отримаємо: $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}}$.

Перемноживши почленно нерівності, маємо: $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$

10.5. Цілі числа k,l,m,n,p задовольняють співвідношення $k^4+l^4+m^4+n^4=p^4$. Довести, що принаймні три з них парні.

Вказівка до розв'язання

Очевидно, що непарних чисел — парна кількість. Тому достатньо показати, що не може бути чотири непарні числа. Четвертий степінь парного числа поділяється на 16, а непарного при діленні на 16 — дає остачу 1. Звідси $k^4+l^4+m^4+n^4-p^4$ при діленні на 16 дає остачу 4 або 2 (якщо чотири числа непарні, а одне парне), тому не дорівнює нулю. Відзначимо, що цілі числа, які задовольняють рівняння, існують. Наприклад, $k=l=m=n=p=0$.

9 клас

9.1.Доведіть, що число $\sqrt{2013\cdot 2015\cdot 2017\cdot 2019+16}$ є цілим.

Вказівки до розв'язання.

Позначимо 2013=n, тоді числа 2013, 2015, 2017, 2019 можна подати як n, n+2, n+4, n+6, а підкореневий вираз можна перетворити таким чином:

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+4)(\mathrm{n}+6)+16=(n^2+6\mathrm{n})(n^2+6\mathrm{n}+8)+4^2=$$
$$(n^2+6\mathrm{n})^2+8(n^2+6\mathrm{n})+4^2=(n^2+6\mathrm{n}+4)^2$$
$$\sqrt{\mathrm{n}(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+4)(\mathrm{n}+6)+16}=\sqrt{(n^2+6\mathrm{n}+4)^2}=|(n^2+6\mathrm{n}+4)|$$

Оскільки у нашому випадку n=2013, то значення виразу є цілим числом.

9.2. Два сплави складаються з цинку, міді і олова. Відомо, що перший сплав вміщує 40% олова, а другий – 26% міді. Процентний вміст цинку в першому і другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, дістали новий сплав, що містить цинку 30%. Скільки олова вміщує цей новий сплав?

Відповідь. 170 кг.

Вказівки до розв'язання.

Позначимо за x кількість відсотків цинку у кожному сплаві, маємо рівняння:

1,5x+2, 5x=120,

x=30

Тоді олова у другому сплаві 74-30=44(%), а у першому 40%. В результаті маємо: 150*0,4+250*0,44=170

Відповідь: 170 кг

9.3. Знайдіть всі пари чисел, що задовольняють рівнянню:

$$\frac{\left(x^2+4x-5\right)^{2018}+\left(2x^2+xy-y^2\right)^2}{\left(y^3+y^2+4y+4\right)\sqrt{21+4y-y^2}}=0.$$

Відповідь. (-5;5), (1;2).

Вказівки до розв'язання.

Враховуючи умову рівності дробу нулю та область визначення виразу маємо систему умов:

$$\begin{cases} x^2+4x-5=0, \\ 2x^2+xy-y^2=0, \\ y^3+y^2+4y+4\neq 0, \\ 21+4y-y^2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)(x-1)=0, \\ (x+y)(2x-y)=0, \\ (y+1)(y^2+4)\neq 0, \\ (y+3)(y-7)<0; \end{cases}$$

З перших двох рівнянь маємо пари розв'язків: (-5;5), (-5;-10), (1;-1), (1;2). Для пар (-5;-10) та (1;-1) не виконуються умови $(y+3)(y-7)<0$ та $(y+1)(y^2+4)\neq 0$ відповідно. Отже, маємо розв'язки: (-5;5), (1;2).

Відповідь: (-5;5), (1;2).

9.4. Діагоналі описаного чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Радіуси описаних кіл трикутників *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* відповідно дорівнюють R_1, R_2, R_3, R_4. Доведіть, що $R_1+R_3=R_2+R_4$.

Вказівки до розв'язання.

Нехай $\angle AOB=\angle COD=\alpha$. Тоді $\angle BOC=\angle AOD=180^\circ-\alpha$. Запишемо

$$R_1=\frac{AB}{2\sin\alpha},\quad R_3=\frac{CD}{2\sin\alpha},\quad R_2=\frac{BC}{2\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}=\frac{BC}{2\sin\alpha},\quad R_4=\frac{AD}{2\sin\alpha}.$$

Тоді $R_1+R_3=\frac{AB+CD}{2\sin\alpha}$, $R_2+R_4=\frac{BC+AD}{2\sin\alpha}$. Враховуючи, що *ABCD* – описаний чотирикутник і $AB+CD=BC+AD$, отримуємо $R_1+R_3=R_2+R_4$.

9.5. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких сума коренів рівняння $x^2-\left(a^2+3a\right)x+5-a=0$ дорівнює 4.

Відповідь. а=1

Вказівки до розв'язання.

$a^2 + 3a = 4$, отже a=-4, a=1. Перевіримо, чи буде рівняння мати дійсні корені при таких значеннях параметра підстановкою. Отримаємо, що при a=-4 дискримінант від'ємний. Отже, a=1.

8 клас

8.1. Для деяких цілих чисел *x* та *y* число 3х+2у ділиться на 29. Чи ділиться на 29 число 23х+25у?

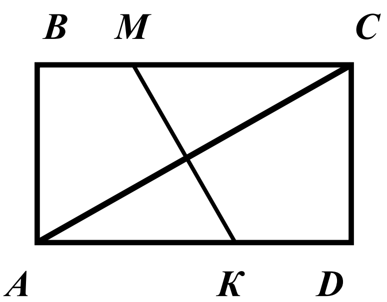
Вказівки до розв'язання.

Помітимо, що 23х+25у=29(х+у)- 2(3х+2у). Кожний з доданків кратний числу 29, отже й сума ділиться на 29.

8.2.Серединний перпендикуляр діагоналі АС прямокутника ABCD перетинає сторону ВС у точці М так, що ВМ:МС=1:2. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

Відповідь. 30⁰ , 60⁰

Вказівки до розв'язання.



Оскільки серединний перпендикуляр є ГМТ точок, рівновіддалених від кінців відрізка, то АМ=МС, тоді у трикутнику АВМ ВМ=0,5 АМ, кут ∠ВАМ=30°. ∠МАК=90°-30°=60°. ΔАМС – рівнобедрений, отже, ∠МАС=∠МСА, ∠МСА=∠CAD (оскільки ВС та AD паралельні), тоді ∠МАС=∠CAD=30°. Маємо: ∠CAD=30°, ∠ACD=60°.

8.3. Коли катер пропливав по річці вздовж міської пристані, від нього відв'язався рятувальний круг. Втрата була помічена капітаном лише через 15 хвилин. Повернувши назад, він наздогнав круг у 250 метрах від пристані. Обчисліть швидкість течії річки.

Відповідь. 0, 5 км/год.

Вказівки до розв'язання.

З рівняння: $15 + \frac{15(v_k - v_t)}{v_k + v_t} + \frac{250}{v_k + v_t} = \frac{250}{v_t}$ знайдемо $v_t = \frac{25\text{м}}{3\text{хв}} = \frac{1\ \text{км}}{2\ \text{год}}$

Відповідь: 0, 5 км/год.

8.4. При яких значеннях параметра a система рівнянь:

$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ y = a - x \end{cases}$ має два розв’язки?

Відповідь. -4<a<4.

Вказівки до розв’язання.

Побудуємо графіки кожного з рівнянь, застосувавши властивості модулів та лінійної функції. Система має два розв’язки, коли пряма $y = a - x$ двічі перетинає сторони квадрату $|x| + |y| = 4$, тобто при -4<a<4.

8.5.Знайдіть всі пари чисел, що задовольняють рівнянню:

$$\frac{\left(x^2 + 4x - 5\right)^{2018} + \left(2x^2 + xy - y^2\right)^2}{y^3 + y^2 + 4y + 4} = 0.$$

Відповідь. (-5;5), (-5;-10), (1;2).

Вказівки до розв’язання.

Враховуючи умову рівності дробу нулю та область визначення виразу маємо систему умов:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 0, \\ y^3 + y^2 + 4y + 4 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)(x-1) = 0, \\ (x+y)(2x-y) = 0, \\ (y+1)(y^2+4) \neq 0; \end{cases}$$

З перших двох рівнянь маємо пари розв’язків: (-5;5), (-5;-10), (1;-1), (1;2).

Для пари (1;-1) не виконуються умова $(y + 1)(y^2 + 4) \neq 0$. Отже, маємо розв’язки: (-5;5), (-5;-10), (1;2).

7 клас

7.1. Знайти всі двоцифрові числа, які збільшуються у 8,5 раза, якщо між цифрами вписати 0.

Відповідь. 12, 24,36,48

Вказівки до розв’язання.

$\overline{a0b} = 8{,}5\overline{ab}$,

$100a + b = 8{,}5(10a + b)$, $100a + b = 85a + 8{,}5b$, $2a = b$.

Враховуючи, що $1 \le a \le 9$ та $0 \le b \le 9$, отримаємо, що $1 \le a \le 4$

Отже, шукані числа 12, 24,36,48.

Відповідь: 12, 24,36,48

7.2. Знайти останню цифру числа $33^{22} + 22^{11}$

Відповідь. 7.

Вказівки до розв’язання.

Число 33 при піднесенні до степеня може закінчуватись цифрами 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,… . Отже, число 33 буде закінчуватись цифрою 9. Аналогічно, можна довести, що число 22^{11} закінчується цифрою 8. Тоді число $33^{22}+22^{11}$ закінчується цифрою 7.

Відповідь: 7

7.3. Витративши половину всіх коштів, учень побачив, що гривень в нього залишилось вдвічі менше, ніж спочатку було копійок, і стільки копійок, скільки на початку було гривень. Скільки грошей витратив учень, якщо копійок у нього було менше 100?

Відповідь. 49 гривень 99 копійок.

Розв'язання:

Нехай учень на початку мав *x* гривень і *y* копійок. За умовою задачі у нього залишилось $\frac{y}{2}$ гривень і x копійок. Тому $100x+y=2\left(\frac{y}{2}\cdot 100+x\right)\Rightarrow 98x=99y$.

Враховуючи, що $y\le 100$ і числа 98 і 99 взаємно прості, отримуємо, *x*=99, *y*=98.

Відповідь: учень витратив 49 гривень 99 копійок.

7.4. Вся площина розмальована в чотири кольори. Чи обов'язково знайдеться пряма, яка містить принаймні три точки різного кольору?

Розв'язання:

Розглянемо чотири точки різного кольору. Якщо три з них лежать на одній прямій, то це і є шукана пряма. Якщо жодні три точки не лежать на одній прямій, то вони утворюють чотирикутник. Розглянемо точку перетину прямих, що містять діагоналі цього чотирикутника, якого б кольору вона не була, одна із діагоналей є шуканою прямою.

6 клас

6.1. Три цифри п'ятицифрового числа одиниці. Відомо, що це число ділиться на 72. Знайти всі такі п'ятицифрові числа.

Відповідь. 14112; 41112; 11160, 11016.

Вказівки до розв'язання.

Оскільки $72=8\cdot 9$, то шукані числа мають ділитися на 8 і на 9, бути обов'язково парними. Сума цифр шуканого числа має бути 9 або 18 і число утворене останніми цифрами має ділитися на 8. Отже, останні три цифри числа утворюють 112 , 160 або 016. Шукані числа 14112; 41112; 11160; 11016.

6.2. Скільки різних правильних дробів і неправильних дробів можна скласти з чисел 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23?

Відповідь. правильних дробів 28; неправильних дробів 36 (якщо врахувати, що деякі з них становлять 1, то правильною можна вважати відповідь і 29).

Вказівки до розв'язання.

З числом 3 в чисельнику за допомогою заданих чисел можна скласти 7 різних правильних дробів. Аналогічно з числами 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 в чисельнику за допомогою заданих чисел можна скласти 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0 відповідно правильних дробів. Отже, всіх різних правильних дробів 7+6+5+4+3+2+1=28. Аналогічно можна підрахувати кількість неправильних дробів, врахувавши дроби у яких чисельник і знаменник рівні.

Відповідь: правильних дробів 28; неправильних дробів 36 (якщо врахувати, що деякі з них становлять 1, то правильною можна вважати відповідь і 29).

6.3. Куб пофарбували з усіх боків, а потім розрізали на 1000 рівних кубиків. Скільки кубиків мають пофарбовані 3 грані ? У скількох кубиках не пофарбована жодна грань?

Відповідь. 8 кубиків мають 3 пофарбовані грані; 512 непофарбованих кубиків.

Вказівки до розв'язання.

1) 8 кубиків мають 3 пофарбовані грані (у вершинах великого куба).
2) $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ непофарбованих кубиків

Відповідь: 8 кубиків мають 3 пофарбовані грані; 512 непофарбованих кубиків

6.4. Сім гномів зібрали 29 грибів, причому жоден не приніс порожнього кошика. Довести, що хоча б двоє гномів зібрали однакову кількість грибів, якщо ніхто більше 7 грибів не знайшов.

Вказівки до розв'язання.

Припустимо, що всі гноми зібрали різну кількість грибів. Тоді вони разом зібрали: 1+2+3+4+5+6+7=28, а за умовою 29 грибів. Отже, ще один гриб знайшов один з гномів, і тоді у двох гномів однакова кількість грибів.